Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 25.06.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} \lambda x + \ 2y + \ z &= 3 \\ -9x - 2\lambda y + 3z &= \lambda \\ 8x + \ \lambda y + 2z &= 6. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{3x-1}{(x+1)^3}.$$

3. Izračunati integral $I = \int\limits_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(2x-5y+3)\mathrm{d}x - (2x+4y-6)\mathrm{d}y = 0.$

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 25.06.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} 2x + (2\lambda-4)y + (\lambda-3)z &= 8 \\ 2x + \ (\lambda-2)y \qquad\qquad &= 5 \\ -3x \qquad\qquad + (\lambda-3)z &= -3. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln\frac{2-x^2}{x}.$$

3. Izračunati integral $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+2x}}.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x-y-1)\mathrm{d}x + (4y+x-1)\mathrm{d}y = 0.$

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 25.06.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x + \qquad 2y + \qquad \lambda z &= 1 \\ 2x + (\lambda+1)y + (2\lambda+2)z &= 2 \\ -3x - \qquad 6y + (4-2\lambda)z &= -6. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x}.$$

3. Izračunati integral $\int \cos^6 x\mathrm{d}x.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x+y)\mathrm{d}x + (3x+3y-4)\mathrm{d}y = 0.$

Grupa D - Pismeni ispit iz Matematike, 25.06.2014.

Pravila: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} 2x + (2\lambda-4)y + (\lambda-3)z &= 8 \\ 2x + \ (\lambda-2)y \qquad\qquad &= 5 \\ -3x \qquad\qquad + (\lambda-3)z &= -3. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln\frac{2-x^2}{x}.$$

3. Izračunati integral $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+2x}}.$

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x-y-1)\mathrm{d}x + (4y+x-1)\mathrm{d}y = 0.$

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\lambda x + 2y + z = 3$$
$$-9x - 2\lambda y + 3z = \lambda$$
$$8x + \lambda y + 2z = 6.$$

Rj-upute:

Sistem riješimo Cramerovom metodom (tj. metodom determinanti)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ -9 & -2\lambda & 3 \\ 8 & \lambda & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} II_v + I_v \cdot (-2) \\ \hline III_v + I_v \cdot (-2) \end{matrix} \ldots = (-7)(\lambda+3)(\lambda-4)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \lambda & -2\lambda & 3 \\ 6 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-4)(\lambda-9) \qquad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ -9 & \lambda & 3 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 2(\lambda-4)(\lambda-9)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ -9 & -2\lambda & \lambda \\ 8 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda^2+16\lambda+27)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq 4$ i $\lambda \neq -3$ $\Rightarrow$ $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda-9}{(-7)(\lambda+3)}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda-9)}{(-7)(\lambda+3)}; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-(\lambda^2+16\lambda+27)}{(-7)(\lambda+3)}$$

2° $\lambda = -3$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $D_x \neq 0$ sistem nema rješenja

3° $\lambda = 4$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $D_x = D_y = D_z = 0$ sistem riješimo na drugi način

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -9 & -8 & 3 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{43}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < 3$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} - t \\ -\frac{43}{14} + \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{16}{7} - t$$
$$y = -\frac{43}{14} + \frac{3}{2}t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$z = t$$

\# Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} 2x + (2\lambda-4)y + (\lambda-3)z &= 8 \\ 2x + (\lambda-2)y &= 5 \\ -3x + (\lambda-3)z &= -3 \end{aligned}$$

Rj.–upute:

Sistem rješimo Cramerovom metodom (tj. metodom determinanti)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2\lambda-4 & \lambda-3 \\ 2 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-2)(\lambda-3) \qquad D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2\lambda-4 & \lambda-3 \\ 5 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & \lambda-3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \ldots = 3(\lambda-3) \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 2\lambda-4 & 8 \\ 2 & \lambda-2 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Diskusija

1° $\lambda \neq 2$ i $\lambda \neq 3 \Rightarrow D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = 1, \quad y = \frac{3}{\lambda-2}, \quad z = 0$$

2° $\lambda = 2 \Rightarrow D = 0, \ D_y \neq 0$ sistem nema rješenje

3° $\lambda = 3 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0 \Rightarrow$ sistem rješavamo na drugi način

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rješenje sistema u ovom slučaju je

$(1, 3, t), \ t \in R$

tj. $x = 1, \ y = 3, \ z = t, \ t \in R$.

(#) Rješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x + 2y + \lambda z &= 1 \\ 2x + (\lambda+1)y + (2\lambda+2)z &= 2 \\ -3x - 6y + (4-2\lambda)z &= -6 \end{aligned}$$

Rj.-upute:

Sistem rješimo Cramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda+1 & 2\lambda+2 \\ -3 & -6 & 4-2\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda+4)(\lambda-3) \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda+1 & 2\lambda+2 \\ -6 & -6 & 4-2\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 4(\lambda^2-2\lambda-6)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 2 & 2\lambda+2 \\ -3 & -6 & 4-2\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 6 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda+1 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{vmatrix} = (-3)(\lambda-3)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq -4$ i $\lambda \neq 3$ $\Rightarrow$ $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4(\lambda^2-2\lambda-6)}{(\lambda+4)(\lambda-3)}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{(\lambda+4)(\lambda-3)}; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{(-3)}{\lambda+4}$$

2° $\lambda = -4$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $D_y \neq 0$ sistem nema rješenje.

3° $\lambda = 3$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $D_y \neq 0$ sistem nema rješenje.

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y = \dfrac{3x-1}{(x+1)^3}$.

Rješenje - upute:

.DEFINICIONO PODRUČJE

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

NULE, PRESJEK SA y-OSOM, ZNAK

Nula f-je je $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Presjek sa y-osom je $(0; -1)$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
y	+	−	+

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ je $V_0 A_0$

(sa desne i sa lijeve str.)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ je $H_0 A_0$

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik f-je

RAST I OPADANJE

$y' = (-6)\dfrac{x-1}{(x+1)^4}$

$f(1) = \dfrac{1}{4}$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	+	+	−
y	↗	↗	↘
		MAX	

tabela rasta i opadanja

EKSTREMI F-JE

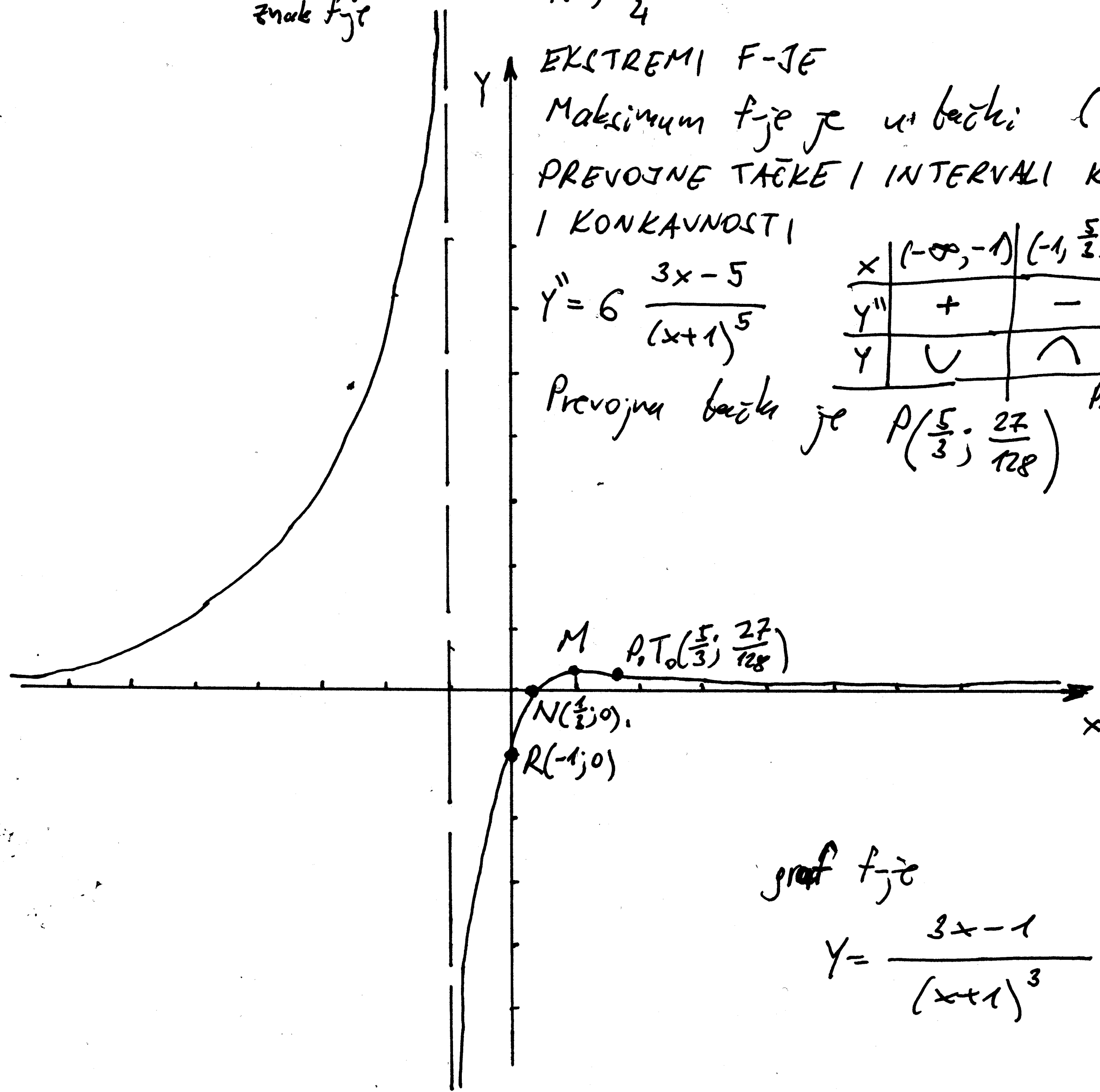
Maksimum f-je je u tački $\left(1; \frac{1}{4}\right)$.

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$y'' = 6\,\dfrac{3x-5}{(x+1)^5}$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{5}{3})$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
y''	+	−	+
y	∪	∩	∪
		P_0T_0	

Prevojna tačka je $P\left(\frac{5}{3}; \frac{27}{128}\right)$



graf f-je

$y = \dfrac{3x-1}{(x+1)^3}$

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y = \ln \frac{2-x^2}{x}$.

Rješenje-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$\mathcal{D}: x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

NULE, PRESJEK SA y-osom, ZNAK

Nule f-je su $M(-2;0)$ i $N(1;0)$

f-ja ne siječe y-osu

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-\sqrt{2})$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{2})$
y	+	−	+	−

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}-0} f(x) = -\infty \Rightarrow x=-\sqrt{2}$, $x=0$ i $x=\sqrt{2}$ su V. A.

(dvije su desne i jedna sa lijeve strane)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$\Rightarrow$ f-ja nema ni kosu ni horizontalnu asimptotu

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati grafik f-je.

RAST I OPADANJE

$y' = \frac{x^2+2}{x^3-2x}$

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(0,\sqrt{2})$
y'	−	−
y	↘	↘

tabela rasta i opadanja

EKSTREMI

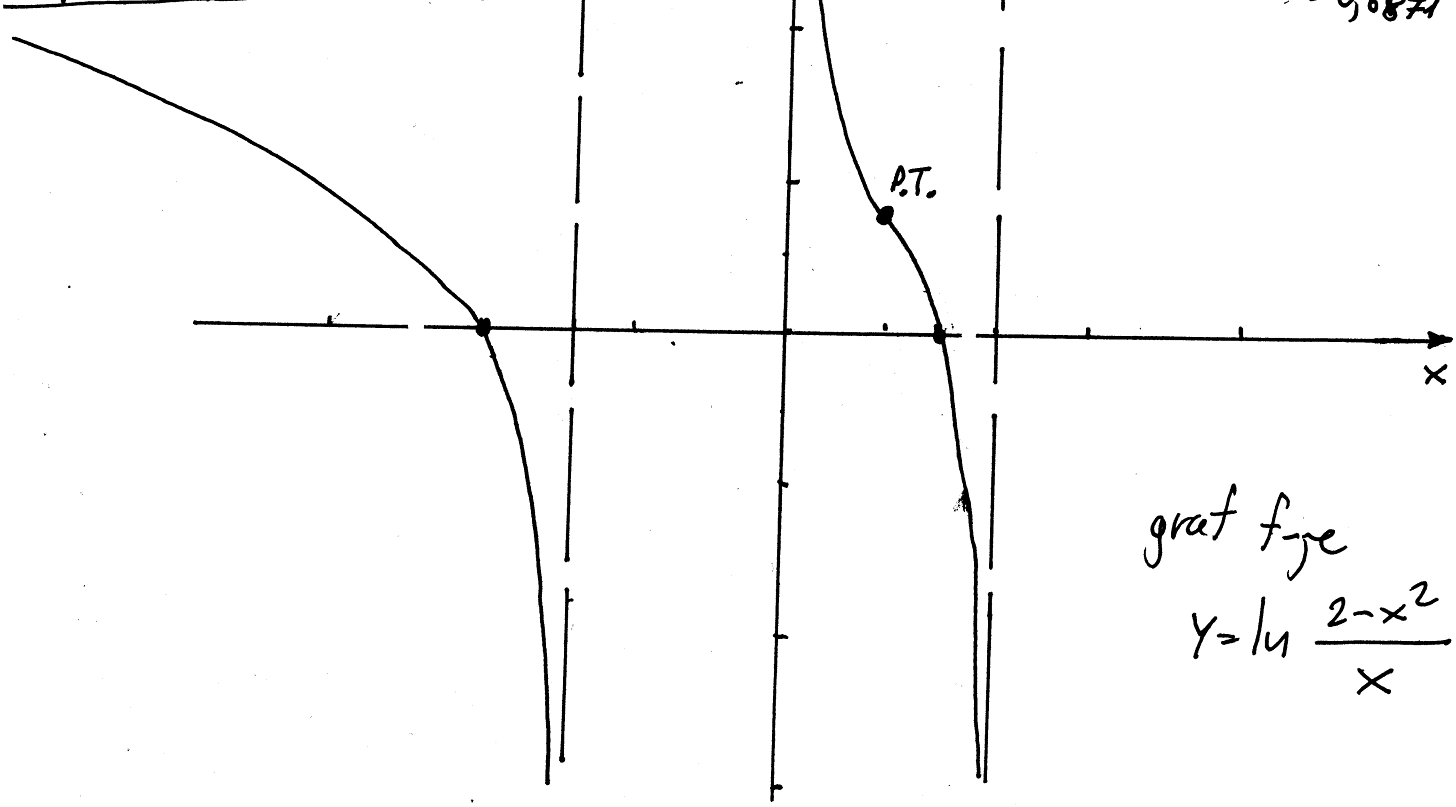
f-ja nema ekstrema

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$y'' = -\frac{x^4+8x^2-4}{x^2(x^2-2)^2}$

nule $x_1 \approx -0{,}6871$

$x_2 \approx 0{,}6871$



graf f-je

$y = \ln \frac{2-x^2}{x}$

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x}$.

Rješenje-upute:

DEFINICIONO PODRUČJE

$D: x \in \mathbb{R}$

$x \in (-\infty, +\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

f-ja nije ni parna ni neparna

f-ja nije periodična

RAST I OPADANJE

$y' = 2e^{-2x} \quad \left(y' = 2\frac{e^{-x}}{e^x}\right)$

$y' > 0 \ \forall x \Rightarrow$ f-ja raste za $\forall x$

EKSTREMI

f-ja nema ekstrema

NULE, PRESJEK SA y-OSOM, ZNAK

Tačka $(0,0)$ je nula f-je i presjek sa y-osom.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y	$-$	$+$

znak f-je

PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

F-ja nema tački prekida $\Rightarrow$ f-ja nema vertikalnu asimptotu

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

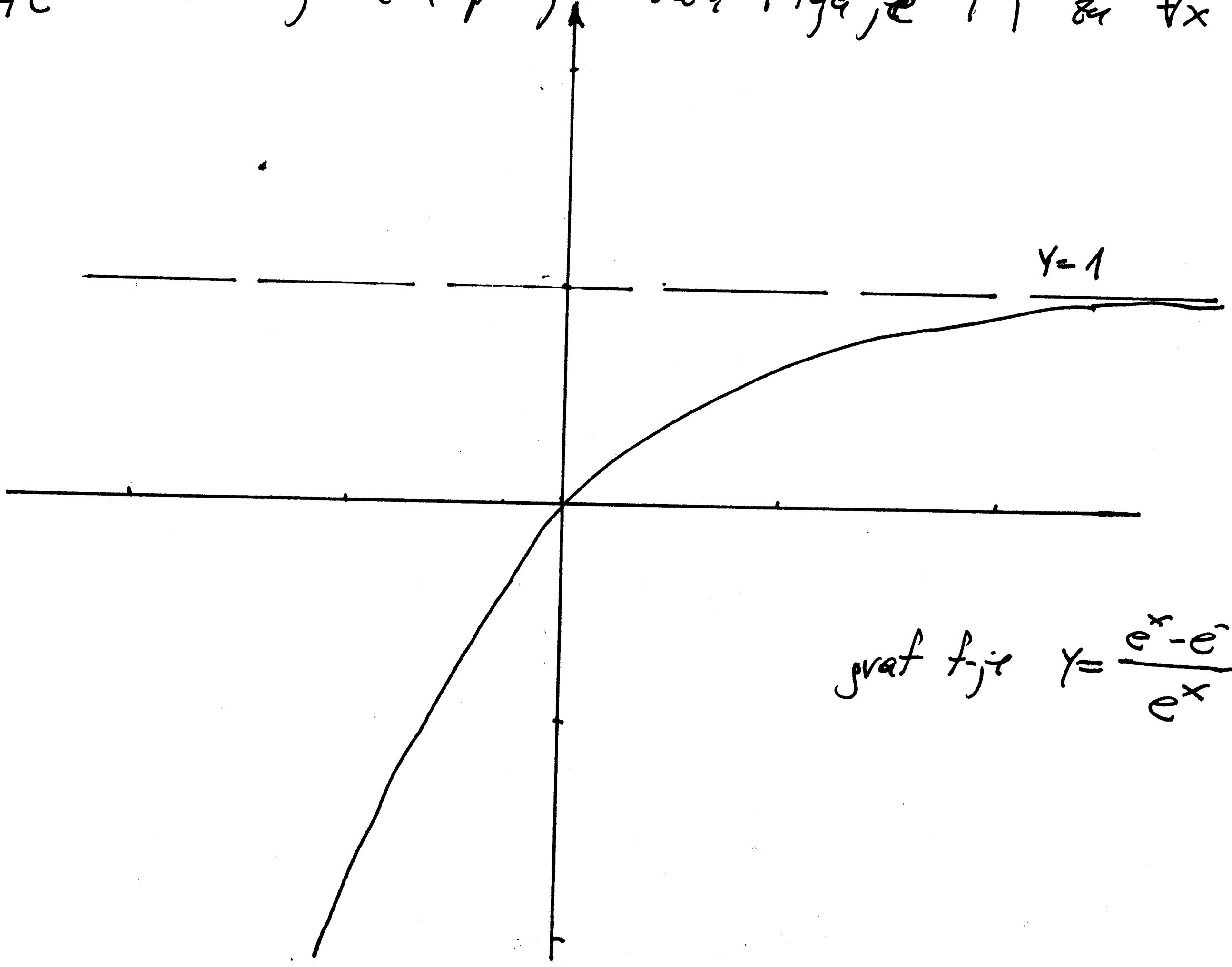
$y = 1$ je H.A. kad $x \to \infty$

f-ja nema kose asimptote

Poslije ovog koraka počinjemo skicirati graf f-je.

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$y'' = -4e^{-2x} \Rightarrow$ f-ja nema prevojnih tački i f-ja je $\cap$ za $\forall x$



graf f-je $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x}$

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$(2x-5y+3)\,dx-(2x+4y-6)\,dy=0$$

Rj.

$$(2x+4y-6)\,dy=-(2x-5y+3)\,dx \quad /:dx \quad /:(2x+4y-6)$$

$$y'=\frac{-2x+5y-3}{2x+4y-6}$$ ovo je diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

Tip smjene zavisi od vrijednosti $\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-8-10=-18\neq 0$

$\Rightarrow$ Uvodimo smjenu $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ gdje brojeve α i β dobijamo rješenjem sistema

$$-2\alpha+5\beta-3=0$$
$$2\alpha+4\beta-6=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha=1,\ \beta=1$$

Uvodimo smjenu

$x=u+1 \Rightarrow dx=du$

$y=v+1 \Rightarrow dy=dv \quad y'=v'$

$$-2x+5y-3=-2u+5v$$
$$2x+4y-6=2u+4v$$

Čime dobijamo sljedeću dif. jedn.

$$v'=\frac{-2u+5v}{2u+4v} \quad \begin{matrix}/:u\\ /:u\end{matrix}$$

$$v'=\frac{-2+5\frac{v}{u}}{2+4\frac{v}{u}}$$ ovo je homogena diferencijalna jednačina (prvog reda)

uvodimo smjenu $\frac{v}{u}=z$

$v=uz$

$v'=z'u+z$

$$z'u+z=\frac{-2+5z}{2+4z}$$
$$\vdots$$
$$\frac{du}{u}+\frac{4}{3}\cdot\frac{dz}{4z-1}+\frac{2}{3}\,\frac{dz}{z+2}=0$$
$$\ln u+\frac{1}{3}\ln(4z-1)+\frac{2}{3}\ln(z+2)=\ln C_1$$
$$u^3(4z-1)(z+2)^2=C$$

Mjenjajući z sa $\frac{v}{u}$, $(4v-u)(v+2u)^2=C$

i mjenjajući u sa $x-1$, i v sa $y-1$

$(4y-x-3)(y+2x-3)^2=C$ traženo opšte rješenje dif. jedn.

(#) Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x-y-1)\,dx+(4y+x-1)\,dy=0 .$$

Rj.

Odmah primjetimo da je data diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu. Tip smjene zavisi od vrijednosti $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1+4=5\neq 0 \Rightarrow$ uvodimo smjenu

$$x=u+\alpha$$
$$y=v+\beta$$

gdje brojeve α i β dobijamo rješenjem sistema

$$\alpha-\beta-1=0$$
$$4\beta+\alpha-1=0 \quad \ldots \quad \alpha=1,\ \beta=0$$

uvodimo smjenu $x=u+1 \Rightarrow dx=du$
$y=v \Rightarrow dy=dv$ pa data jednačina se svodi na

$$(u-v)\,du+(4v+u)\,dv=0$$ a ovo je homogena dif. jednač. (step. 1)

uvodimo smjenu $v=zu$
$dv=z\,du+u\,dz$

iz čega dobijamo $(1-z)\,du+(4z+1)(z\,du+u\,dz)=0$

$$\frac{du}{u}+\frac{4z+1}{4z^2+1}\,dz=\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\,\frac{8z}{4z^2+1}\,dz+\frac{dz}{4z^2+1}=0$$

$$\ln u+\frac{1}{2}\ln(4z^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2z=c_1 \Rightarrow \ln u^2(4z+1)+\operatorname{arctg}2z=c$$

$$\Rightarrow \ln(4v^2+u^2)+\operatorname{arctg}\frac{2v}{u}=c$$

$$\ln\left[4y^2+(x-1)^2\right]+\operatorname{arctg}\frac{2y}{x-1}=c$$ traženo opšte rješenje dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x+y)\,dx+(3x+3y-4)\,dy=0$$

Rj:

$$(3x+3y-4)\,dy=-(x+y)\,dx \quad /:dx \quad /:(3x+3y-4)$$

$$y'=\frac{-x-y}{3x+3y-4}$$ ovo je diferencijalna jednačina koja se svodi na homogenu

Tip smjene zavisi od vrijednosti $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-3+3=0.$

$\Rightarrow$ Uvodimo smjenu $x+y=u \Rightarrow$ $3x+3y=3u$

$y=u-x$

$dy=du-dx$

$$(x+y)\,dx+(2x+3y-4)\,dy=0$$

uvodimo navedenu smjenu

$$u\,dx+(3u-4)(du-dx)=0$$

$$(4-2u)\,dx+(3u-4)\,du=0 \quad /:(4-2u)$$

$$dx+\frac{3u-4}{4-2u}\,du=0$$ ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenljivim

$$2\,dx+\frac{3u-4}{2-u}\,du=0 \Rightarrow 2\,dx-3\,du+\frac{2}{2-u}\,du=0$$

Nakon integraljenja i zamjene u sa x+y dobijemo

$$2x-3u-2\ln(2-u)=C_1$$

$$2x-3(x+y)-2\ln(2-x-y)=C_1$$

$$x+3y+2\ln(2-x-y)=C$$ traženo opšte rješenje